関数 $y=ax^2$

y が x の関数で，$y=ax^2$（ただし a は 0 でない定数）の関係が成り立つとき，y は x の 2 乗に比例するといい，a を比例定数といいます。

比例，反比例，1 次関数と学習してきて，ここでは新たに 2 次関数を学習します。2 次関数がどういうものか，まずは表を作って点を打つ（プロット）することによってグラフをかいていきましょう。

関数 $y=x^2$ について，x のそれぞれの値に対応する y の値を求めると，

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

この表の値をグラフにプロットしたものが図 1 です。

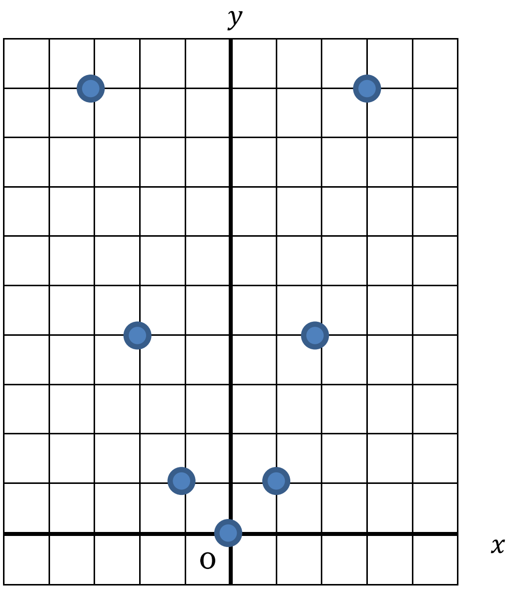


図 1

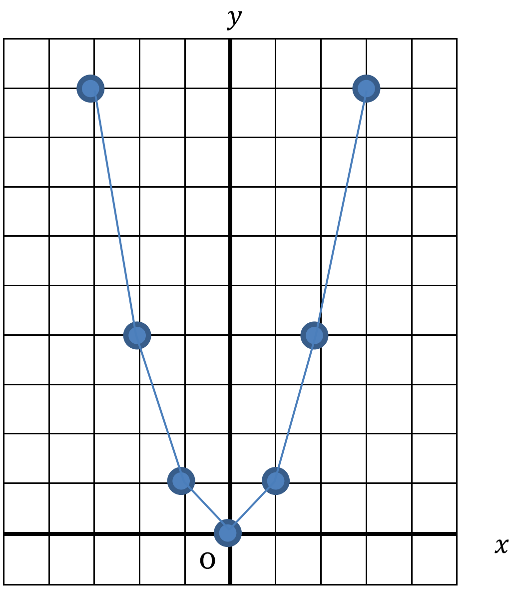
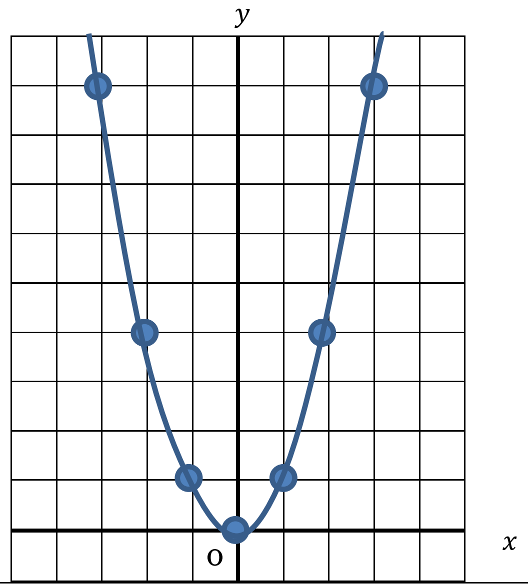


図 2

プロットしていった点をどのように結べばいいだろうか？図 2 のように直線で結べばいいのだろうか？ここで，反比例で学習したことが活きてきます！反比例のグラフは双曲線と呼ばれ，直線ではなくなめらかな線を結びました。2 次関数では放物線と呼ばれるなめらかな曲線をえがきます。x の値を 1 ずつ動かしてもわかりづらい人は，0.5 ずつや 0.1 ずつ y の値を調べてプロットしてみましょう。

なめらかに結ぶと次のような放物線ができます。



$y = ax$ と $y = ax^2$ の比較

$y = ax$	$y = ax^2$
x が 2 倍，3 倍・・・になると，y は 2 倍，3 倍・・・になる。	x が 2 倍，3 倍・・・になると，y は 4 倍，9 倍・・・になる。
通る 1 点がわかれば代入して，a の値を求めることができる。	通る 1 点がわかれば代入して，a の値を求めることができる。
グラフは必ず原点 (0, 0) を通る。	グラフは必ず原点 (0, 0) を通る。
比例定数 a が正の数ならば，右上がりのグラフ。	比例定数 a が正の数ならば，上に開いたグラフ。
比例定数 a が負の数ならば，右下がりのグラフ。	比例定数 a が負の数ならば，下に開いたグラフ。
a の絶対値が大きくなるにつれて，グラフは y 軸に近くなる。	a の絶対値が大きくなるにつれて，グラフの開き方は小さくなる。
$a > 0$ のとき，x の値が増加するにつれて，y の値は増加し，変域がなければ最小値，最大値は存在しない。	$a > 0$ のとき，x の値が増加するにつれて，y の値は，$x \leqq 0$ で減少，$x \geqq 0$ で増加し，最大値は存在しないが，$x = 0$ で最小値 0 をとる。
$a < 0$ のとき，x の値が増加するにつれて，y の値は減少し，変域がなければ最小値，最大値は存在しない。	$a < 0$ のとき，x の値が増加するにつれて，y の値は，$x \leqq 0$ で増加，$x \geqq 0$ で減少し，$x = 0$ で最大値 0 をとる。
$y = ax$ と $y = -ax$ のグラフは x 軸について対称である。	$y = ax^2$ と $y = -ax^2$ のグラフは x 軸について対称である。

復習

変化の割合

x の関数 y について，　x の値が p から q まで増加したときの $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ の値を，　x の値を，

x の値が p から q まで増加したときの変化の割合といいます。

1 次関数の変化の割合

$y = ax + b$ について，　x の値が p から q まで増加したときの変化の割合は，

$$\text{変化の割合} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{(aq+b)-(ap+b)}{q-p} = \frac{aq-ap}{q-p} = \frac{a(q-p)}{q-p} = a\ (\text{一定})$$

変化の割合は p や q に影響されない値なので，　変化の割合は一定で，　それは 1 次関数の傾きと等しいことがわかります。

2 次関数の変化の割合

$y = ax^2$ について，　x の値が p から q まで増加したときの変化の割合は，

$$\text{変化の割合} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{aq^2-ap^2}{q-p} = \frac{a(q^2-p^2)}{q-p} = \frac{a(q+p)(q-p)}{q-p} = a\,(q+p)$$

すなわち比例定数 a と $p+q$ の積で求めることができます。この変化の割合の図形的な意味は，　曲線上の 2 点 $(p,\ ap^2)$，　$(q,\ aq^2)$ を結ぶ直線の傾きに等しいということである。

注

1 次関数の変化の割合は一定で傾きに等しかったのですが，　2 次関数では $a\,(q+p)$ と p，q の値に依存しています。ですのでしっかり計算して答えをだすようにしていきましょう。また，　公式を使うと計算が楽になりますが，　いきなり使うのではなく，　変化の割合の定義どおり計算していって，　計算が慣れていったら使うようにしていきましょう。

例　関数 $y = -3x^2$ について，　x の値が-2 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

x の値が-2 のとき，　$y = -3 \times (-2)^2 = -12$

x の値が 3 のとき，　$y = -3 \times 3^2 = -27$

$$\text{変化の割合} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{-27-(-12)}{3-(-2)} = \frac{-27+12}{3+2} = \frac{-15}{5} = -3$$

（公式を用いた解放）

変化の割合$= a(p+q) = -3(-2+3) = -3$

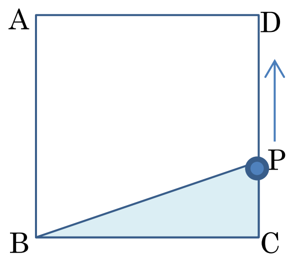
2 次関数の利用

2 次関数を利用した文章題について学習を行っていきます。連立方程式の問題と違って x, y が何であるのか問題文で明らかにされています。問題文で言われていることをしっかり計算式に表せるように演習を行っていきましょう。

点や図形の移動と関数の問題について

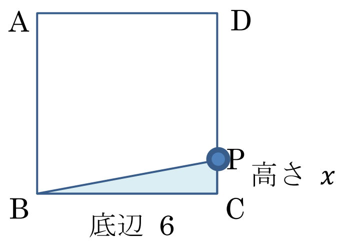
例

右の図のような 1 辺が 6cm の正方形があります。点 P は秒速 1cm で周上を C から, D, A を通って B まで動きます。点 P が出発してから x 秒後の△BPC の面積を $y\text{cm}^2$ とするとき, 次の x の変域において, それぞれ y を x の式で表しなさい。



① $0 \leqq x \leqq 6$ ② $6 \leqq x \leqq 12$ ③ $12 \leqq x \leqq 18$

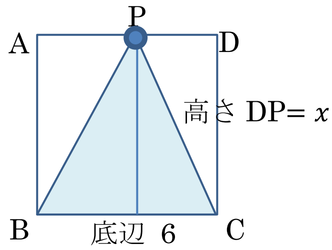
① $0 \leqq x \leqq 6$のとき



底辺$\text{BC} = 6$, 高さ$\text{CP} = x$ より,

△BCP の面積$= 6 \times x \div 2 = 3x$

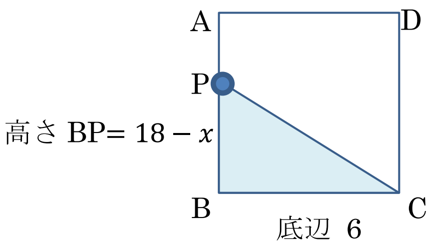
② $6 \leqq x \leqq 12$のとき



底辺$\text{BC} = 6$, 高さ$\text{CP} = \text{CD} = 6$ より,

△BCP の面積$= 6 \times 6 \div 2 = 18$

③ $12 \leqq x \leqq 18$のとき



底辺$\text{BC} = 6$, 高さは BP である。CP の長さが x なので, BP の長さは辺 CD, 辺 DA, 辺 AB の長さの和から辺 CD, 辺 DA, 辺 AP の長さの和をひいたものである。よって,

BP$= (6 + 6 + 6) - x = 18 - x$

△BCP の面積$= 6 \times (18 - x) \div 2 = -3x + 54$

①，②は特に問題ないと思います。③について BP の長さがわからかりづらいと感じる人もいるかもしれませんが，その場合は下記の 1 次関数の要点のところで詳しく説明しているのでこちらを確認してください。